Formule d'inversion de Fourier

Nico

Soit $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \int |f| < +\infty\}/\sim$ où $f \sim g \iff f = g$ pp.
On définit $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\, dt$ la transformée de Fourier de f

Théorème : Inversion de Fourier : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x) \text{ presque partout}$$

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}\, dt \text{ presque partout}$$

En particulier, l'application $\mathcal{F}^{-1}(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}\, dt$ est réciproque de $f \mapsto \hat{f}$

On démontrera d'abord le résultat suivant :

Lemme 1 : Transformée de Fourier de la gaussienne : Soit $a > 0$ un réel. On définit la fonction $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma_a}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$

Lemme 2 : Soit $g_n = \gamma_{\frac{n}{2}}$ $\forall n \geq 1$, $(\hat{g_n})_n$ est une approximation de l'unité

Pour tenir 15 minutes, je propose d'admettre le lemme 1 pour les leçons 234 et 235 et d'admettre le lemme 2 pour les leçons 236 et 250

Démonstration. Lemme :

Montrons tout d'abord que $\hat{\gamma_a}$ est bien définie. Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-ax^2} e^{-ix\xi}| \ dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \ dx < +\infty$$

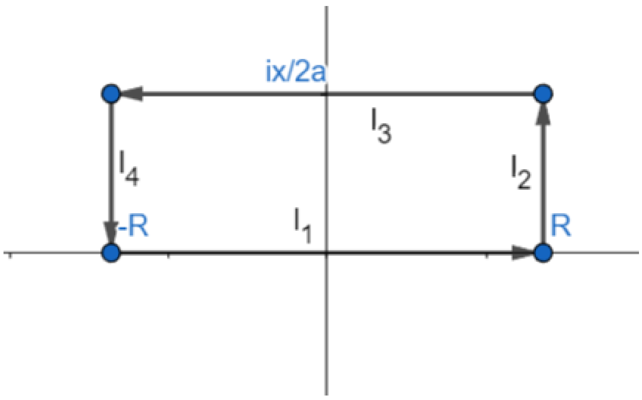
D'où $\gamma_a \in L^1$

On constate que $ax^2 + ix\xi = a\left(x + i\dfrac{\xi}{2a}\right)^2 + \dfrac{\xi^2}{4a}$. Ainsi,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \hat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} \ dx \tag{1}$$

On note $I(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} \ dx$

Soit $R > 0$, $x \in \mathbb{R}$, on définit le contour C_R suivant :



Contour C_R

On souhaite déterminer l'intégrale de la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ sur ce contour. On a donc par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{C_R} e^{-az^2} \ dz &= \int_{-R}^{R} e^{-at^2} \ dt + \int_{0}^{\frac{x}{2a}} ie^{-a(R+it)^2} \ dt - \int_{-R}^{R} e^{-a(t+i\frac{x}{2a})^2} \ dt - \int_{0}^{\frac{x}{2a}} ie^{-a(-R+it)^2} \ dt \\ &= I_1 + I_2 - I_3 - I_4\end{aligned} \tag{2}$$

$z \mapsto e^{-az^2}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, et C_R étant un contour fermé,

$$\int_{C_R} e^{-az^2} = 0 \tag{3}$$

Déterminons I_2 : $|I_2| \leq \dfrac{x}{2a} e^{-aR^2} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$. D'où par encadrement, $I_2 \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$.
De même, $I_4 \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$

Calculons I_1 : $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} e^{-at^2}\ dt = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ par convergence dominée

Enfin, $\forall t, x \in \mathbb{R},\ \forall R > 0,\ |\mathbb{1}_{]-R;R[} e^{-a(t+i\frac{x}{2a})^2}| \leq e^{-at^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc par théorème de convergence dominée :

$$I(x) = \lim_{R\to+\infty} I_3 = I_1 \text{ par (2) et (3) } \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où par (1),

$$\hat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

□

Démonstration. Lemme 2 :

Montrons que $(\hat{g_n})_n$ est une approximation de l'unité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$||\hat{g_n}||_1 = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{nx^2}{2}}\ dx = 1$$

$\forall n \geq 1,\ \hat{g_n} \geq 0$

Enfin, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon} \hat{g_n}(t)\ dt = 1 - \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nt^2}{2}}\ dt \underset{x=\sqrt{n}t}{=} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-1 = 0 \text{ par TCVD}$$

Cela conclut que $(\hat{g_n})_n$ est une approximation de l'unité

□

Démonstration. Inversion de Fourier

Soit $\varepsilon > 0$,

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g_n(t) e^{itx}\ dt &= \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(t) e^{itx} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ity}\ dy\ dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(t) e^{it(x-y)}\ dt\ dy \text{ par Fubini} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g_n}(x-y)\ dy \\
&= f * \hat{g_n}(x)
\end{aligned}$$

D'une part, $(\hat{g_n})_n$ étant une approximation de l'unité :

$$f * \hat{g_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{ presque partout} \tag{4}$$

D'autre part, $\forall n \geq 1$, $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(t) g_n(t) e^{itx}| \leq |\hat{f}(t)|$ qui est intégrable presque partout par hypothèse. Donc par théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g_n(t) e^{itx} \, dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} \hat{f}(t) g_n(t) e^{itx} \, dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} \, dt \text{ presque partout} \tag{5}$$

Ainsi, par unicité de la limite, par (4) et (5)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} \, dt \text{ presque partout}$$

□

Recasages

- Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.